Resp. forzada armónica: amortiguación proporcional (i)

Ecuación de movimiento: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{f_0}Sen(\Omega t)$

Frecuencia de excitación

Solución propuesta: $\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{x}_{h(t)} + \mathbf{x}_{p(t)}$

Solución homogénea (transitoria):

$$\mathbf{x}_{h(t)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j e^{-\zeta_j t}\left[A_{1j}Cos\left(\omega_{dj}t\right) + A_{2j}Sin\left(\omega_{dj}t\right)\right]$$

Solución particular (permanente): $\mathbf{x}_{p(t)} = \mathbf{\Phi}\mathbf{p}_{p(t)}$

Ecuación de movimiento en coord. modales: $\overline{\mathbf{M}}\ddot{\mathbf{p}}_{(t)} + \overline{\mathbf{C}}\dot{\mathbf{p}}_{(t)} + \overline{\mathbf{K}}\mathbf{p}_{(t)} = \bar{\mathbf{f}}_0 Sen(\Omega t)$

$$\overline{\mathbf{M}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \qquad \overline{\mathbf{K}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{K}\mathbf{\Phi} \qquad \overline{\mathbf{C}} = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{C}\mathbf{\Phi} \qquad \bar{\mathbf{f}}_0 = \mathbf{\Phi}^T\mathbf{f}_0$$

excitación modal

N ecuaciones de la forma:

$$\ddot{p}_j + 2\zeta_j\omega_j\dot{p}_j + \omega_j^2 p_j = \frac{f_j^*}{\mu_j} Sen(\Omega t) \qquad j = 1 \cdots N$$

I. Introducción

II. Sistema de 1-GDL

III. Sistemas de *N*-GDL
- Descripción
- Ec. de movimiento
- Cálculo de M y K
- Resp. libre
- Resp. Forzada
  - Armónica simple
    - Amort. Rayleigh
    - Amort. general
    - Troncatura modal
    - Ejemplo
  - Excitación periódica
  - Excitación general
- Reducción modal

IV. Medición / diagnóstico

V. Bibliografía

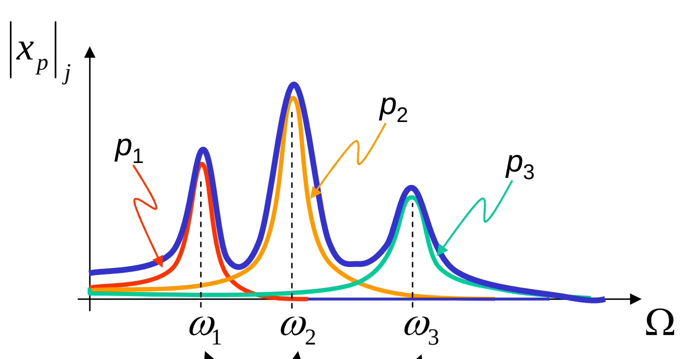
Resp. forzada armónica: amortiguación proporcional (ii)

Solución:

Superposición modal

$$\mathbf{x}_{p(t)} = \mathbf{\Phi}\mathbf{p}_{p(t)} = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_j p_j = \sum_{j=1}^{N}\boldsymbol{\varphi}_j X_j Sin\left(\Omega t - \gamma_j\right)$$

$$X_j = f_j^* \Big/ \kappa_j \frac{1}{\sqrt{\left(1-r_j^2\right)^2 + \left(2\zeta_j r_j\right)^2}} \qquad \gamma_j = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta_j r_j}{1-r_j^2}\right) \qquad r_j = \frac{\Omega}{\omega_j}$$



Frecuencias propias

Resp. forzada armónica: amortiguación general (i)

Desfasaje entre las fuerzas

Ecuación de movimiento: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{f_o} e^{i(\Omega t + \alpha_j)}$

Solución propuesta: $\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{x}_{h(t)} + \mathbf{x}_{p(t)}$

Frecuencia de excitación

Solución homogénea (transitoria):

$$\mathbf{x}_{h(t)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j e^{-a_j t}\left[A_{1j} Cos\left(b_j t\right) + A_{2j} Sin\left(b_j t\right)\right]$$

Solución particular (permanente): $\mathbf{x}_{p(t)} = \boldsymbol{\psi} e^{i\left(\Omega t + \phi_j\right)}$

Sistema de *N* ecuaciones con *N* incógnitas en variable compleja: $\left[-\Omega^2\mathbf{M} + i\Omega\mathbf{C} + \mathbf{K}\right]\boldsymbol{\psi} e^{i\phi_j} = \mathbf{f_o} e^{i\alpha_j}$

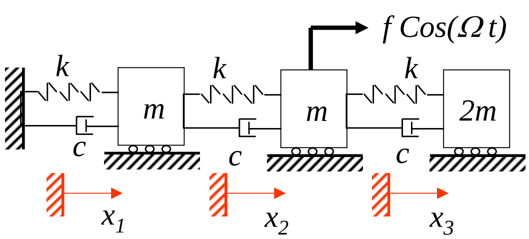
Solución álgebra real

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{\psi}_R \\ \boldsymbol{\psi}_I \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} & -\Omega\mathbf{C} \\ \Omega\mathbf{C} & \mathbf{K} - \Omega^2\mathbf{M} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{OR} \\ \mathbf{f}_{OI} \end{Bmatrix} \qquad \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_{OR} \\ \mathbf{f}_{OI} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f_o} Cos(\alpha_j) \\ \mathbf{f_o} Sen(\alpha_j) \end{Bmatrix}$$

Universidad Simón Bolívar
MC-2415 Vibraciones Mecánicas

I. Introducción
II. Sistema de 1-GDL
III. Sistemas de *N*-GDL
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. Forzada
Armónica simple
Amort. Rayleigh
Amort. general
Troncatura modal
Ejemplo
Excitación periódica
Excitación general
Reducción modal
IV. Medición / diagnóstico
V. Bibliografía

Resp. forzada armónica: amortiguación general (ii)



$$\mathbf{x} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{f_o} = \begin{Bmatrix} 0 \\ f \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 \\ 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 2m \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2c & -c & 0 \\ -c & 2c & -c \\ 0 & -c & c \end{bmatrix} \quad \mathbf{K} = \begin{bmatrix} 2k & -k & 0 \\ -k & 2k & -k \\ 0 & -k & k \end{bmatrix}$$

$m = 1,\ c = 0.5,\ k = 10,\ f = 1,\ \Omega = 0...10$

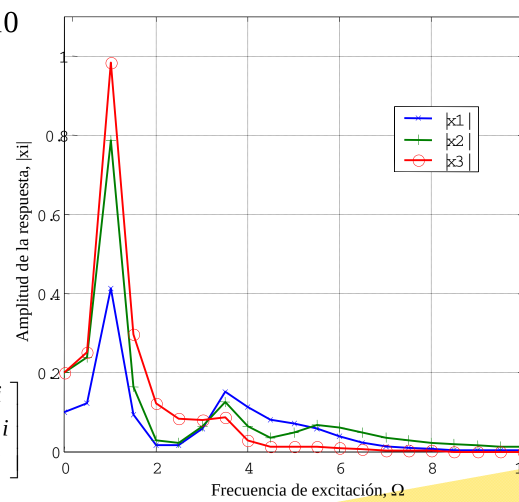
Autovalores

$$\lambda_j = \begin{Bmatrix} -0.032 \pm 1.125\,i \\ -0.318 \pm 3.553\,i \\ -0.775 \pm 5.514\,i \end{Bmatrix}$$

Autovectores

$$\boldsymbol{\Phi} = \left[\boldsymbol{\varphi}_1 \quad \boldsymbol{\varphi}_2 \quad \boldsymbol{\varphi}_3\right]$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} 0.19 - 0.05i & -0.03 + 0.20i & 0.10 + 0.07i \\ 0.36 - 0.10i & -0.02 + 0.15i & -0.11 - 0.08i \\ 0.49 - 0.14i & 0.01 - 0.10i & 0.02 + 0.01i \end{bmatrix}$$



Resp. forzada armónica: Troncatura modal

Ecuación de movimiento: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{(t)} + \mathbf{K}\mathbf{x}_{(t)} = \mathbf{f}_{\mathbf{O}} e^{i\Omega t}$

Solución: $\mathbf{x}_{p(t)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j p_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j X_j Sin(\Omega t - \gamma_j)$

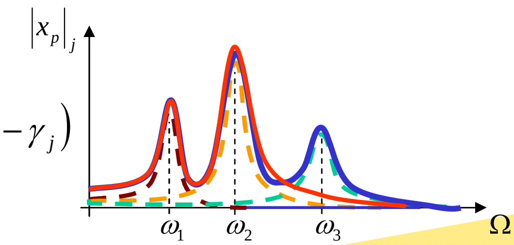
$$X_j = \frac{f_j^*}{\kappa_j} \frac{1}{\sqrt{(1-r_j^2)^2 + (2\zeta_j r_j)^2}} \qquad \gamma_j = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta_j r_j}{1-r_j^2}\right) \qquad r_j = \frac{\Omega}{\omega_j}$$

Para los modos de alta frecuencia (*i.e.* $\omega_j >> \Omega$) se cumple que:

$$r_j = \left.\frac{\Omega}{\omega_j}\right|_{j\to N} \approx 0 \;\Rightarrow\; X_j\big|_{j\to N} = \left.\frac{f_j^*}{\kappa_j}\frac{1}{\sqrt{(1-r_j^2)^2+(2\zeta_j r_j)^2}}\right|_{j\to N} \approx \frac{f_j^*}{\kappa_j} \approx 0$$

Solución aproximada:

$$\mathbf{x}_{p(t)} \approx \sum_{j=1}^{m<<N} \boldsymbol{\varphi}_j p_j = \sum_{j=1}^{m<<N} \boldsymbol{\varphi}_j X_j Sin(\Omega t - \gamma_j)$$



Universidad Simón Bolívar
MC-2415 Vibraciones Mecánicas

I. Introducción
II. Sistema de 1-GDL
III. Sistemas de *N*-GDL
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. Forzada
Armónica simple
Amort. Rayleigh
Amort. general
Troncatura modal
Corr. estática
Corr. dinámica
Ejemplo
Excitación periódica
Excitación general
Reducción modal
IV. Medición / diagnóstico
V. Bibliografía

Resp. forzada armónica: Troncatura modal (corrección estática)

Superposición modal: $\mathbf{x} = \underbrace{\boldsymbol{\Phi}_R \mathbf{p}_R}_{\text{Modos a retener}} + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}_E \mathbf{p}_E}_{\text{Modos a eliminar}}$

Modos a eliminar

Modos a retener

Aproximación: $\mathbf{x} \approx \boldsymbol{\Phi}_R \mathbf{p}_R + \underbrace{\boldsymbol{\Phi}_E \mathbf{p}_{Es}}_{\text{Contribución estática de los modos a eliminar (Corrección estática)}}$

Contribución estática de los modos a eliminar (Corrección estática)

Problema estático:

$$\mathbf{K}\mathbf{x}_s = \mathbf{K}\left[\boldsymbol{\Phi}_R \mathbf{p}_{Rs} + \boldsymbol{\Phi}_E \mathbf{p}_{Es}\right] = \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \boldsymbol{\Phi}_E \mathbf{p}_{Es} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - \boldsymbol{\Phi}_R \mathbf{p}_{Rs}$$

Prob. estático en base modal: $\overline{\mathbf{K}}_R \mathbf{p}_{Rs} = \overline{\mathbf{f}}_R = \boldsymbol{\Phi}_R^T \mathbf{f} \;\Rightarrow\; \mathbf{p}_{Rs} = \overline{\mathbf{K}}_R^{-1} \boldsymbol{\Phi}_R^T \mathbf{f}$

Corrección estática: $\boldsymbol{\Phi}_E \mathbf{p}_{Es} = \mathbf{K}^{-1}\mathbf{f} - \boldsymbol{\Phi}_R \overline{\mathbf{K}}_R^{-1} \boldsymbol{\Phi}_R^T \mathbf{f} = \left[\mathbf{K}^{-1} - \boldsymbol{\Phi}_R \overline{\mathbf{K}}_R^{-1} \boldsymbol{\Phi}_R^T\right] \mathbf{f}$

Troncatura modal con corrección estática: $\mathbf{x} \approx \boldsymbol{\Phi}_R \mathbf{p}_R + \underbrace{\left[\mathbf{K}^{-1} - \boldsymbol{\Phi}_R \overline{\mathbf{K}}_R^{-1} \boldsymbol{\Phi}_R^T\right]}_{\text{Flexibilidad residual}} \mathbf{f}$

Flexibilidad residual

Resp. forzada armónica:
Troncatura modal (corrección dinámica)

Ecuación de movimiento: $\mathbf{M}\ddot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{x}}_{(t)}+\mathbf{K}\mathbf{x}_{(t)}=\mathbf{f}_{(t)}$

Superposición modal: $\mathbf{x}=\underbrace{\mathbf{\Phi}_R\mathbf{p}_R}_{\text{Modos a retener}}+\underbrace{\mathbf{\Phi}_E\mathbf{p}_E}_{\text{Modos a eliminar}}$

Aproximación $\begin{cases}\dot{\mathbf{x}}\approx\mathbf{\Phi}_R\dot{\mathbf{p}}_R\\ \ddot{\mathbf{x}}\approx\mathbf{\Phi}_R\ddot{\mathbf{p}}_R\end{cases}$

Despejando de la Ec. de movimiento: $\mathbf{\Phi}_E\mathbf{p}_E=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_R\ddot{\mathbf{p}}_R-\mathbf{K}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{\Phi}_R\dot{\mathbf{p}}_R-\mathbf{\Phi}_R\mathbf{p}_R$

Excitación armónica $\Rightarrow$ $\dot{\mathbf{p}}_R=i\Omega\mathbf{p}_R$ $\quad$ $\ddot{\mathbf{p}}_R=-\Omega^2\mathbf{p}_R$

Prob. de autovalores $\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_R=\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_R\left[\Omega_R^2\right]$ $\Rightarrow$ $\mathbf{M}\mathbf{\Phi}_R=\mathbf{K}\mathbf{\Phi}_R\left[\Omega_R^2\right]^{-1}$

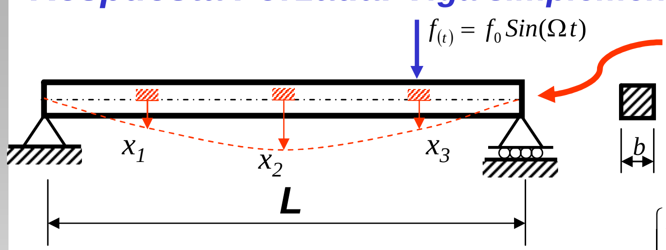
Flexibilidad retenida $\mathbf{K}^{-1}\approx\mathbf{\Phi}_R\overline{\mathbf{K}}_{RR}^{-1}\mathbf{\Phi}_R^T$

$$\mathbf{\Phi}_{NE}\mathbf{p}_E=\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}-\mathbf{\Phi}_{NR}\left[\mathbf{I}_R-\Omega^2\left[\Omega_R^2\right]^{-1}+i\overline{\mathbf{K}}_R^{-1}\overline{\mathbf{C}}_R\right]\mathbf{p}_R$$

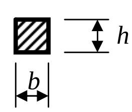
Troncatura modal con corrección dinámica:

$$\mathbf{x}\approx\mathbf{\Phi}_R\mathbf{p}_R+\mathbf{K}^{-1}\mathbf{f}-\mathbf{\Phi}_R\left[\mathbf{I}_R-\Omega^2\left[\Omega_R^2\right]^{-1}+i\overline{\mathbf{K}}_R^{-1}\overline{\mathbf{C}}_R\right]\mathbf{p}_R$$

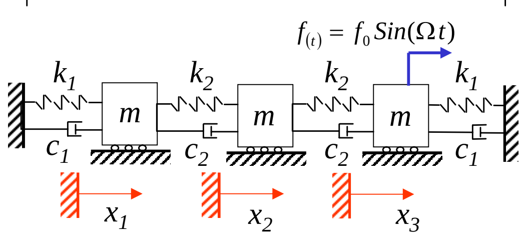
Respuesta Forzada: Viga simplemente apoyada (i)



Viga (ρ, E, I, A, L)



$A=b\,h$ $\quad$ $I=\dfrac{b\,h^3}{12}$ $\quad$ $M=\rho AL$



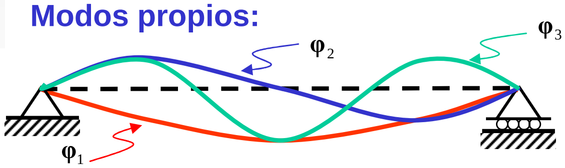
$$\mathbf{x}_{(t)}=\begin{Bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{Bmatrix}\qquad \mathbf{K}=\frac{192EI}{7L^3}\begin{bmatrix}23&-22&9\\-22&32&-22\\9&-22&23\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}=\frac{\rho AL}{4}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\qquad \mathbf{f}_{(t)}=\begin{Bmatrix}0\\0\\f_0\end{Bmatrix}Sin(\Omega t)$$

Frecuencias propias (sin amortiguación):

$$\begin{Bmatrix}\omega_1\\\omega_2\\\omega_3\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}9.8659\\39.1918\\83.2128\end{Bmatrix}\sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}$$

Modos propios:



$$\mathbf{\Phi}=\left[\boldsymbol{\varphi}_1\quad\boldsymbol{\varphi}_2\quad\boldsymbol{\varphi}_3\right]=\begin{bmatrix}1&-1&-1\\\sqrt{2}&0&\sqrt{2}\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

Respuesta Forzada: Viga simplemente apoyada (ii)

Datos: $\begin{cases} E = 200\,GPa \quad \rho = 7800\, {}^{kg}\!/_{m^3} \quad L = 10\,m \quad b = h = 0.1\,m \quad A = 0.01\,m^2 \\ I = 8.3\times 10^{-6}\,m^4 \quad M = 780\,kg \quad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 3\% \quad f_0 = 10\,N \end{cases}$

$$\overline{\mathbf{M}} = 390\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}[kg] \qquad \overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} 0.09 & 0 & 0 \\ 0 & 0.34 & 0 \\ 0 & 0 & 0.73 \end{bmatrix}\left[{}^{N\,s}\!/_{m}\right]$$

$$\overline{\mathbf{K}} = 10^7\begin{bmatrix} 0.016 & 0 & 0 \\ 0 & 0.128 & 0 \\ 0 & 0 & 1.15 \end{bmatrix}\left[{}^{N}\!/_{m}\right] \qquad \overline{\mathbf{f}} = 10\begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{Bmatrix} Sin(\Omega t)[N]$$

Respuesta permanente:

$$\mathbf{x}_{p(t)} = \mathbf{\Phi}\mathbf{p}_{p(t)} = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j p_j = \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_j X_j Sin(\Omega t - \gamma_j)$$

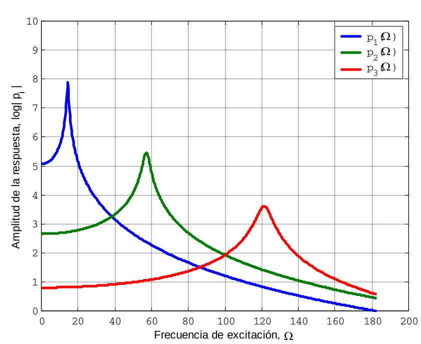
$$X_j = {}^{f_j^*}\!/_{\kappa_j} \frac{1}{\sqrt{\left(1-r_j^2\right)^2 + \left(2\zeta_j r_j\right)^2}} \qquad \gamma_j = tg^{-1}\left(\frac{2\zeta_j r_j}{1-r_j^2}\right) \qquad r_j = \frac{\Omega}{\omega_j}$$

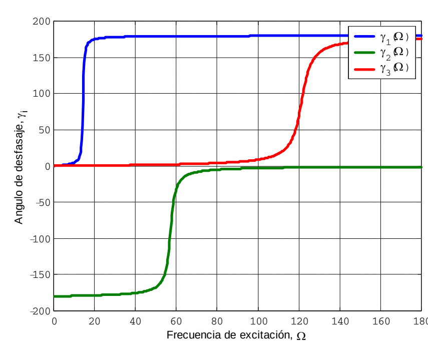
$$\omega_1 = 14.42\, {}^{r}\!/_{s} \qquad \omega_2 = 57.29\, {}^{r}\!/_{s} \qquad \omega_3 = 121.63\, {}^{r}\!/_{s} \qquad \zeta_1 = \zeta_2 = \zeta_3 = 3\%$$

$$ {}^{f_1^*}\!/_{\kappa_1} = 6.25\times 10^{-5}\,m \qquad {}^{f_2^*}\!/_{\kappa_2} = 0.781\times 10^{-5}\,m \qquad {}^{f_3^*}\!/_{\kappa_3} = -0.087\times 10^{-5}\,m$$

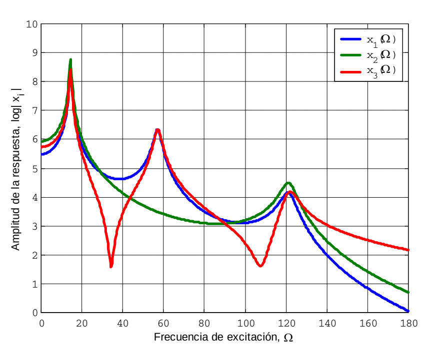
Respuesta Forzada: Viga simplemente apoyada (iii)

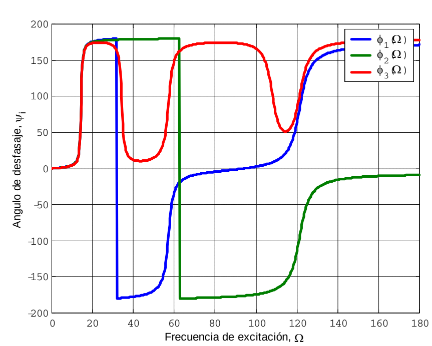
Coordenadas modales





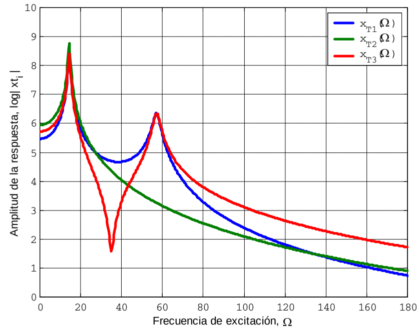
Coordenadas físicas

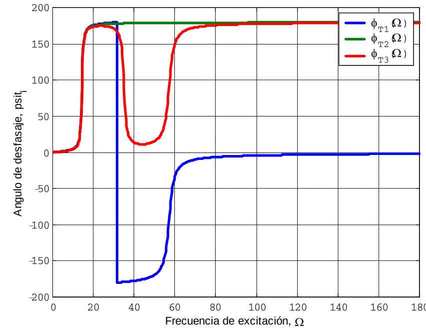




Respuesta Forzada: Viga simplemente apoyada (iv)

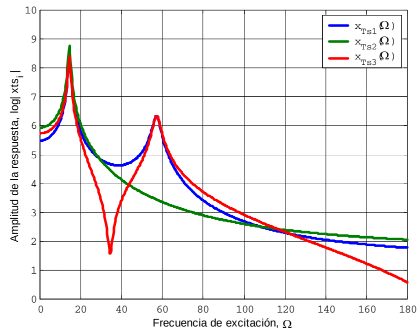
Coordenadas físicas: troncatura modal (2 modos)



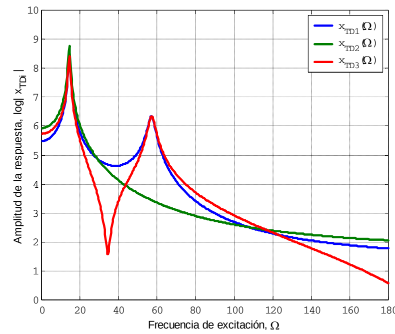


Coordenadas físicas: troncatura modal (2 modos)

Corrección estática



Corrección dinámica



Respuesta Forzada: Viga simplemente apoyada (iv)

I. Introducción
II. Sistema de 1-GDL
III. Sistemas de *N*-GDL
Descripción
Ec. de movimiento
Cálculo de M y K
Resp. libre
Resp. Forzada
Armónica simple
Amort. Rayleigh
Amort. general
Troncatura modal
Ejemplo
Excitación periódica
Excitación general
Reducción modal
IV. Medición / diagnóstico
V. Bibliografía

Coordenadas físicas: comparación